METHODES GLOBALES DE COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT POUR CERTAINES CLASSES DE SYSTEMES NON LINEAIRES A NON MINIMUM DE PHASE : quelques résultats nouveaux liés en particulier à l'utilisation d'un inverse non causal

---

Cet exposé fait suite et complète mon précédent exposé sur la commande en suivi de trajectoire des systèmes non linéaires affines à non minimum de phase du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{array} \right. \tag{1}$$

avec les hypothèses : $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, les champs de vecteurs f, g et la fonction h sont suffisamment dérivables.
ρ indice caractéristique est strictement inférieur à n. Il existe donc une dynamique interne dont le point d'équilibre de la dynamique des zéros sera considéré comme instable au sens de Lyapunov.
On considèrera que les difféomorphismes $z = \phi(x)$ conduisant aux deux formes canoniques "classiques" (forme normale de Byrnes-Isidori et forme "strict feedback" de Marino et Tomei) existent et sont globaux. $det\left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\right] \neq 0,\ \forall x$. Faute de temps, la seconde forme qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = x_{j+1} + \varphi_j(x_1, \ldots, x_j)\ \forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \dot{x}_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) + \psi_n(x_1, \ldots, x_n)u \\ y = h(x_1, \ldots, x_{n-\rho+1}) \end{array} \right. \tag{2}$$

$\psi_n(x_1, \ldots, x_n) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, les fonctions $\varphi_{(.)}$ sont C^∞ et $\varphi_{(.)}(0) = 0$
sera priviligiée. Cependant, associée à la notion de platitude, la première forme pose quasiment les mêmes problèmes de synthèse.
Faute de temps également, la prise en compte des incertitudes ainsi que la commande adaptative non linéaire ne sont pas traitées, ce qui est possible

sous certaines hypothèses évidemment.

Par contre, on remarquera que cette étude théorique considère que tout l'état est mesurable et donc ne traitera que de retour d'état et non de retour de sortie avec observateur contrairement par exemple aux travaux d'Andrieux et Praly (2009).
D'autre part, on ne s'intéressera qu'à des résultats globaux dans le sens suivant :
- valables pour n'importe quelle valeur initiale du vecteur d'état $\in R^n$,
- valable pour n'importe quel type de trajectoire éventuellement définie par morceaux et de classe au moins C^ρ bornée et à dérivées bornées. Ceci inclut les trajectoires périodiques mais aussi les transitions de sortie entre une valeur initiale constante de la sortie y_0 à $t \leq t_0$ et une valeur finale constante y_f à $t \geq t_f$. La transition entre y_0 et y_f suivra par exemple une trajectoire polynomiale.

Le "grand élan" des années 1980-1990 a abondamment traité le cas des systèmes non linéaires affines à **minimum de phase** (Byrnes et Isidori entre autres mais on pourrait citer tous les grands noms de l'Automatique). Ce problème a vu son aboutissement avec les notions de dynamique interne ISS (Sontag) et du "peaking phenomena" (Sussman, Kokotovic).
Le cas **non minimum de phase** par contre a été étudié par un nombre réduit d'auteurs parmi lesquels il faut citer Marino et Tomei (les célèbres livres de Khalil ou de Krstic, Kanellakopoulos et Kokotovic ne traitent que du cas où la dynamique interne est ISS).

Un rappel rapide sera initialement effectué pour résumer mes anciens propos. Je rappelerai donc, pour la forme "strict feedback", les deux méthodes de commande qui, selon moi, fonctionnent : la méthode de Marino et Tomei et la méthode que j'avais proposée.
Alors que la méthode de Marino et Tomei nécessite l'intégration formelle d'un système linéaire ou non linéaire d'EDP, la seconde méthode nécessite l'inversion d'une équation différentielle (linéaire ou non linéaire), équation qui correspond à la "tracking dynamics" (dynamique interne écrite avec la trajectoire de référence). Lors de mon premier exposé, j'avais proposé une méthode d'inversion qui certes assurait la convergence asymptotique de l'er-

reur de trajectoire mais restait "rustique" dans le sens où elle ne fonctionnait que dans le cas d'une dynamique interne linéaire, d'une trajectoire périodique et de plus induisait de gros écarts de trajectoire durant la phase transitoire.

L'essentiel de mon exposé a pour but de lever ces limitations et touche à l'introduction de l'inversion non causale pour la dynamique interne, ce modèle inverse constituant par la suite la partie feedforward de la commande recherchée. Le cas avec dynamique interne linéaire sera abordé par une extension quasi "évidente" des travaux pionniers de Pallestrelli et Piazzi (IFAC, 2004) et nous verrons que, dans ce cas, le modèle inverse non causal peut être explicitement calculé.
Le cas où dynamique interne est non linéaire sera également traité en utilisant les travaux initiés par Devasia et *al* (IEEE TAC 1996). Dans ce cas une condition suffisante utilisant une série de normes L_1 et L_∞ permet d'assurer la convergence (au sens du point fixe) vers une solution numérique de l'inverse au moyen des approximants de Picard.
Pour terminer, l'intégration de ce modèle inverse sera effectuée dans la méthode que j'avais proposée afin de résoudre le problème initial du suivi de trajectoire pour les systèmes non linéaires sous forme "strict feedback" à non minimum de phase.
Cet exposé est imparfait car il laisse un certain nombre de question en suspens (en particulier sur l'inversion dans le cas non linéaire). Il suscitera sans doute de nombreuses questions et remarques.